Europäische Schulen

Büro des Generalsekretärs
Abteilung für pädagogische Entwicklung

Ref.: 2011-01-D-42-de-2

Orig.: FR

S7ma MATHEMATIKLEHRPLAN 7. SCHULJAHR SEKUNDARSTUFE

Vertiefungskurs 3 Stunden/Woche

VOM GEMISCHTEN PÄDAGOGISCHEN AUSSCHUSS DER EUROPÄISCHEN SCHULEN AM 9., 10. und 11. FEBRUAR 2011 IN BRÜSEL GENEHMIGT

Mit Inkraftsetzung zum September 2011

I. VERPFLICHTENDER TEIL

THEMA A: TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN (AM KREIS UND HYPERBOLISCH)

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Formeln der Kreistrigonometrie	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ folgende gebräuchliche Formeln wiederholen oder mithilfe der komplexen Zahlen herleiten: ○ $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ ○ $1+\tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ ○ Formeln zur Addition: ▪ $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$ a ▪ $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$ ▪ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$ ○ Formeln zur Verdoppelung: ▪ $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$ ▪ $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$ ▪ $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$ ○ Formeln zum Variablenwechsel: ▪ $\cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ▪ $\sin a = \frac{2t}{1+t^2}$ mit $t = \tan\frac{a}{2}$	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ den Technologieträger sinnvoll einsetzen, um die nebenstehenden gebräuchlichen Formeln aufzustellen oder zu prüfen

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	▪ $\tan a = \frac{2t}{1-t^2}$ ○ Formeln zur Transformation von Summen in Produkte: ▪ $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▪ $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▪ $\sin p \pm \sin q = 2\sin\left(\frac{p\pm q}{2}\right)\cos\left(\frac{p\mp q}{2}\right)$ ○ Formeln zur Transformation von Produkten in Summen: ▪ $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ ▪ $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ ▪ $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ ▪ $\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}$ ▪ $\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$ ▪ eine Gleichung lösen, die sich auf trigonometrische Funktionen bezieht ▪ Potenzen trigonometrischer Funktionen in Summen trigonometrischer Funktionen umformen ▪ $\cos(nx)$ bzw. $\sin(nx)$ mithilfe von Potenzen $\cos x$ bzw. $\sin x$ darstellen	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Arkusfunktionen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ zu den Arkusfunktionen arccos, arcsin und arctan angeben können: ○ ihre Definitionen ○ ihre Definitionsmengen ○ ihre möglichen Grenzwerte ○ ihre mögliche Symmetrien ○ ihre Bereiche der Differenzierbarkeit ○ ihre Ableitungsfunktionen ○ ihr Steigungsverhalten ▪ zu jeder trigonometrischen und Arkusfunktion eine Stammfunktion angeben ▪ Funktionen (und Funktionsscharen) untersuchen, die sich auf trigonometrische oder Arkusfunktionen beziehen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die in dem 5-stündigen Mathematikkurs gelernten Techniken auf die neu eingeführten Funktionen, die trigonometrische oder Arkusfunktionen enthalten, anwenden
Hyperbolische Funktionen – Definitionen und Formeln	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die Definitionen der Funktionen cosh, sinh und tanh angeben ▪ aufstellen folgender Formeln: ○ $\cosh a + \sinh a = e^{a}$ und $\cosh a - \sinh a = e^{-a}$ ○ $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$ ○ $1 - \tanh^2 a = \dfrac{1}{\cosh^2 a}$ ○ Formeln zur Addition: ▪ $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cosh b \pm \sinh a \sinh b$ ▪ $\sinh(a \pm b) = \sinh a \cosh b \pm \cosh a \sinh b$	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die technologischen Hilfsmittel sinnvoll einsetzen, um die nebenstehend angegebenen Formeln aufzustellen oder zu prüfen

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	▪ $\tanh(a \pm b) = \frac{\tanh a \pm \tanh b}{1 \pm \tanh a \tanh b}$ ○ Formeln zur Verdoppelung: ▪ $\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a$ $= 2\cosh^2 a - 1 = 2\sinh^2 a + 1$ ▪ $\sinh(2a) = 2\sinh a \cosh a$ ▪ $\tanh(2a) = \frac{2\tanh a}{1 + \tanh^2 a}$ ○ Formeln zur Variablenänderung: ▪ $\cosh a = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ ▪ $\sinh a = \frac{2t}{1-t^2}$ mit $t = \tanh\frac{a}{2}$ ▪ $\tanh a = \frac{2t}{1+t^2}$ ○ Formeln zur Transformation von Summen in Produkte: ▪ $\cosh p + \cosh q = 2\cosh\left(\frac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▪ $\cosh p - \cosh q = 2\sinh\left(\frac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▪ $\sinh p + \sinh q = 2\sinh\left(\frac{p+q}{2}\right)\cosh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ▪ $\sinh p - \sinh q = 2\cosh\left(\frac{p+q}{2}\right)\sinh\left(\frac{p-q}{2}\right)$ ○ Formeln zur Transformation von Produkten in Summen: ▪ $\cosh a \cosh b = \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b) + \cosh(a-b)\right]$	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	▪ $\sinh a \cosh b = \frac{1}{2}\left[\sinh(a+b)+\sinh(a-b)\right]$ ▪ $\sinh a \sinh b = \frac{1}{2}\left[\cosh(a+b)-\cosh(a-b)\right]$ ▪ $\cosh^2 a = \frac{\cosh(2a)+1}{2}$ ▪ $\sinh^2 a = \frac{\cosh(2a)-1}{2}$ ▪ Potenzen von hyperbolischen Funktionen in Summen hyperbolischer Funktionen umformen ▪ $\sinh(nx)$, bzw. $\cosh(nx)$ mithilfe von Potenzen von $\sinh(nx)$ bzw. $\cosh(nx)$ darstellen	
Studie der hyperbolischen Funktionen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ für die hyperbolischen Funktionen cosh, sinh und tanh angeben können: ○ ihre Definitionsmengen ○ ihre Grenzwerte ○ ihre Symmetrien ○ ihre Bereiche der Differenzierbarkeit ○ ihre Ableitungsfunktionen ○ ihr Steigungsverhalten ▪ zu jeder hyperbolischen Funktion eine Stammfunktion angeben ▪ Funktionen (und Funktionsscharen) untersuchen, die sich auf hyperbolische Funktionen beziehen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die in dem 5-stündigen Mathematikkurs gelernten Techniken auf die neu eingeführten Funktionen, die hyperbolische Funktionen enthalten, anwenden

THEMA B: ENDLICHE ENTWICKLUNGEN

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel

Klassische Sätze und Voraus-setzungen für die endlichen Entwicklungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen*
	
	▪ angeben und anwenden folgender Sätze:
	  ○ Satz von Rolle
	  ○ Mittelwertsatz
	  ○ die Ungleichung des Mittelwertsatzes (und dessen Korollare)
	▪ eine Kontraktion bestimmen
	▪ einen Fixpunkt einer differenzierbaren Kontraktion ermitteln
	▪ die *n*-te Ableitung einer Funktion bestimmen
	▪ eine Funktion der Menge C^n bestimmen
	▪ die Taylorformel *n*-ten Grades für eine Funktion der Menge C^n , darunter Polynome vom Grad kleiner oder gleich n, angeben
	▪ die Taylor-Lagrange-Formel und die MacLaurin-Lagrange-Formel *n*-ten Grades für Funktionen der Menge C^{n+1} angeben
	▪ die MacLaurin-Lagrange-Entwicklung anwenden, um einen Näherungswert einer Funktion an einer Stelle und die Zunahme des Fehlers bestimmen
		Die Schüler sollen Folgendes beherrschen
		
		▪ den oder die Werte bestimmen, deren Existenz sich aus dem Satz von Rolle und dem Mittelwertsatz ergeben
		▪ eine gegen einen Fixpunkt konvergierende Folge durch eine Kontraktion darstellen (zweidimensionaler Graph)
		▪ die *n*-te Ableitung einer Funktion der Menge C^n berechnen
		▪ den regulären Teil einer Entwicklung von Taylor, von Taylor-Lagrange und von MacLaurin-Lagrange in der Umgebung jeder reellen Zahl berechnen
		▪ den regulären Teil einer endlichen Entwicklung *n*-ten Grades einer gegebenen Funktion grafisch darstellen
		▪ eine Familie von endlichen Entwicklungen einer Funktion angegeben können
		▪ den regulären Teil einer endlichen Entwicklung *n*-ten Grades verwenden, um einen Näherungswert einer Funktion an einer Stelle zu bestimmen

Endliche Entwicklungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die endliche Entwicklung *n*-ten Grades einer Funktion in der Umgebung von Null bestimmen ▪ wissen, dass die endliche Entwicklung *n*-ten Grades , wenn sie existiert, eindeutig ist ▪ endliche Entwicklungen *n*-ten Grades einer Funktion in der Umgebung von Null für folgende Funktionen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die endliche Entwicklung *n*-ten Grades einer Funktion in der Umgebung von einer beliebigen reellen Zahl bestimmen Bemerkung:

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	bestimmen: ○ $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$ ○ $x \mapsto \ln(1 \pm x)$ ○ $x \mapsto (1+x)^n, n \in \left\{\frac{1}{2}; 2; 3; ...\right\}$ ○ $x \mapsto e^x$ ○ $x \mapsto \cos x$ ○ $x \mapsto \sin x$ ▪ endliche Entwicklungen *n*-ten Grades in der Umgebung von Null für Funktionen bestimmen, die sich durch Addition, Multiplikation, Division, Mischung, Integration und Ableitung aus den zuvor genannten Funktionen ergeben ▪ endliche Entwicklungen *n*-ten Grades in einer Umgebung $a \neq 0$ der zuvor genannten Funktionen bestimmen	Die Benutzung des Technologieträgers erfolgt unterschiedlich: ▪ die Ergebnisse prüfen, die ohne Hilfsmittel für die einfachen Fälle erzielt wurden ▪ für die Standardrechnungen bei den endlichen Entwicklungen sollten die technologischen Hilfsmittel benutzt werden, um den Schwerpunkt dann auf die Interpretation und die Anwendung der Ergebnisse zu legen
Anwendungen der endlichen Entwicklungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ anwenden der endlichen Entwicklungen auf: ○ Grenzwertberechnungen ○ Näherung einer Funktion in der Umgebung eines Punktes durch ein Polynom mindestens zweiten Grades ○ eine relative Position der Kurve einer Funktion in Bezug auf eine ihrer Tangenten ○ die Studie des asymptotischen Verhaltens einer Funktion mithilfe der verallgemeinerten endlichen Entwicklung (z.B. parabolische Zweige)	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen* ▪ die technologischen Hilfsmittel sinnvoll bei allen Anwendungen der endlichen Entwicklungen einsetzen

II. THEMEN ZUR AUSWAHL

WICHTIGE VORBEMERKUNG

Im Gegensatz zum vorangegangenen verpflichtenden Teil des Programms, beschränkt sich die Beschreibung der Wahlthemen auf die größeren zu behandelnden Leitlinien, wobei leichte inhaltliche Anpassungen im Hinblick auf Besonderheiten der nationalen Programme oder auf die Anforderungen der Universitäten in unterschiedlichen Ländern der Europäischen Union möglich bleiben. Es ist dem Lehrer überlassen, entsprechende Anpassungen vorzunehmen.

Aus Gründen der Lesbarkeit und der Vergleichbarkeit dieses Teils des Programmes, sollten die für diesen Kurs verantwortlichen Lehrer eine präzise Aufstellung der aus dem Wahlbereich behandelten Themen anfertigen. Diese Aufstellung wird den mündlichen Prüfungsfragen beigefügt, die dem verantwortlichen Inspektor für Mathematik innerhalb der Europäischen Schulen übermittelt werden. Dieser wird sicherstellen, dass die Gesamtheit dieser Informationen (Aufstellung der behandelten Unterrichtsstoffe in den zwei Wahlthemen und Fragen für die mündliche Prüfung) den externen Prüfern zur Verfügung gestellt wird, die für die mündlichen Prüfungen bestimmt wurden.

1. Grundbegriffe der Topologie

- Intuitive Topologie - Punkte, Bogen, Flächen
- Übergang von der intuitiven zur strukturellen Topologie
- Topologische Räume – Modelle: Topologie von Kreisscheibe, Spat und Kugel
- Hausdorffsche Räume
- Homeomorphismen

2. Differenzialgleichungen

Lösung von Differenzialgleichungen:

- durch Separation der Variablen
- in folgenden Formen:
  - $y' + y \cdot f(x) = g(x)$, wo $g(x)$ gleich null, eine ganzrationale -, eine Exponential- oder eine trigonometrische Funktion ist
  - $\rho_2 \cdot y'' + \rho_1 \cdot y' + \rho_0 = f(x)$, wo $f(x)$ gleich null, eine ganzrationale -, eine Exponential- oder eine trigonometrische Funktion ist

3. Vertiefung der Integralrechnung

- Berechnungen von Stammfunktionen und Integralen durch Zerlegung in einfache Bestandteile von Integralen des Typs $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ mit P und Q als ganzrationale Funktionen (man beschränke sich auf den Fall, in dem Q einfache reelle, mehrfache reelle oder zwei konjugiert komplexe Nullstellen hat)
-
- Berechnungen von Stammfunktionen und Integralen, die auf jenen Stammfunktionen basieren, welche in dem Kapitel über kreistrigonometrische und hyperbolische Funktionen untersucht wurden
- Berechnungen von Stammfunktionen und Integralen, die auf Substitutionen des Typs $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \tan x$, $t = \tan\frac{x}{2}$, $t = \sinh x$, $t = \cosh x$ basieren.
- Berechnungen von Stammfunktionen und Integralen durch Wiederholung, z.B. Integrale des Typs
- $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x\, dx$, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $\int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$, $\int_1^e (\ln x)^n\, dx$, …
- Formel von Wallis

4. Anwendung der Integralrechnung

- Berechnung des Mittelwerts der Quadratwurzel einer Zeitfunktion
- Ermittlung des Schwerpunkts einer ebenen Oberfläche, eines festen Körpers welcher ein symmetrisches Element enthält und einer Fläche
- Berechnung des Trägheitsmomentes einer ebenen Oberfläche, eines festen Körpers und einer Fläche, welche ein symmetrisches Element enthält
- Berechnung der Länge eines Kurvenbogens, wenn die Gleichung der Kurve in Koordinaten- oder in Parameterform gegeben ist
- Berechnung des Inhalts der Oberfläche eines Rotationskörpers
- Integration in Polarkoordinaten

5. Partielle Ableitung

- Funktionen in zwei Variablen: partielle Ableitungen erster Ordnung, geometrische Interpretation, partielle Ableitungen höherer Ordnung
- Differenziale
- Ableitung von zusammengesetzten Funktionen
- Eulers 1. Satz für homogene Funktionen
- Richtungsableitung, Maxima, Minima, Sattelpunkte

6. Zahlenreihen

- Definition, allgemeines Glied einer Reihe, n-te Partialsumme (man beschränke sich auf die reellen Zahlenreihen)
- Reihe mit positiven Gliedern, Reihe mit negativen Gliedern, alternierende Reihe, Minorante oder Majorante einer Reihe
- Konvergenz und Divergenz einer Zahlenreihe
- Notwendige Bedingung der Konvergenz einer Reihe (wenn die Reihe $\sum u_n$ konvergiert, dann konvergiert die Folge (u_{tn}) gegen null die Umkehrung ist falsch)
- Einige klassische Zahlenreihen:
  - die geometrische Reihe $\sum a^n$ mit $a \in \mathbb{R}$
  - die harmonische Reihe $\sum \frac{1}{n}$
  - die alternierende harmonische Reihe $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$
  - die Riemann-Reihe $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$
- Konvergenzkriterien für Zahlenreihen:
  - Konvergenzkriterien für geometrische Reihen
  - Vergleichskriterium (man kann sich auf die Zahlenreihen mit positiven Gliedern beschränken)
  - Vergleichskriterium Reihe-Integral
  - Konvergenzkriterium für alternierende Reihen (Regel von Leibniz) (wenn (u_n) eine alternierende Folge ist, wobei $(|u_n|)$ eine abnehmende Folge ist und $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$, dann ist die Reihe $\sum u_n$ konvergent)
  - Konvergenzkriterium für Riemann-Reihen (wenn $\alpha > 1$ ist, dann konvergiert die Reihe mit dem allgemeine Glied $\frac{1}{n^\alpha}$ und wenn $\alpha \leq 1$ ist, divergiert sie)
  - Konvergenzkriterium von d'Alembert (wenn $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l$, dann gilt für eine Reihe mit dem allgemeinen Glied (u_n), dass sie für
    - $l < 1$ konvergiert
    - $l > 1$ divergiert
    - $l = 1$ sich unbestimmt verhält
- absolut konvergente und halbkonvergente Reihen

7. Ebene Querschnitte von Oberflächen

- Funktionen in zwei Variablen
- Querschnitt einer Oberfläche durch eine Ebene
- Querschnitt eines Zylinders
- Querschnitte von Kegeln
- Querschnitte von Oberflächen, die durch Gleichungen der Form $z = x^2 + y^2$ *und* $z = x \cdot y$ gegeben sind

8. Korrelation und Regression

- lineare Regression (Methode der kleinsten Quadrate)
- allgemeine Regression (exponentiell, logarithmisch, polynomial, sinusförmig)
- Kovarianz
- Rangkorrelation, Koeffizienten von Spearman und von Kendall

9. Konfidenzintervalle, Testen von Hypothesen und Chi2-Test

- erwartungstreue Schätzungen des Mittelwertes μ und der Varianz σ^2 eines quantitativen Merkmals einer Population
- Verteilung des Mittelwertes $\overline{X}$ von Zufallsvariablen X_i, wenn sie derselben Verteilung (normal oder andere) zuzuordnen sind (Satz vom „zentralen Grenzwert")
- Konfidenzintervalle des Mittelwertes μ einer Population, die normalverteilt ist oder nicht, bekannter oder unbekannter Varianz (Stichprobe von großem Umfang)
- Testen von Hypothesen für den Parameter p einer Binomialverteilung (Stichprobe von kleinem Umfang) oder dem Parameter λ einer Poisson-Verteilung
- Testen von Hypothesen für den Mittelwert μ einer Population, die normalverteilt ist oder nicht, bekannter oder unbekannter Varianz (Stichprobe von großem Umfang)
- Chi2-Test (chi-Quadrat oder χ^2) um zu überprüfen:
  - die Unabhängigkeit der beiden Zufallsvariablen
  - eine Anpassung durch eine bekannte Verteilung (Binomial-, Poisson- oder Normalverteilung)

10. Baryzentrischer Kalkül und affine Geometrie

- Baryzentrischer Kalkül
- Untersuchung der Funktionen $M \to \sum_1^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ und $M \to \sum_1^n \alpha_i \left\|\overrightarrow{MA_i}\right\|^2$
- affine Abbildungen
- spezielle Fälle:
  - Isometrie
  - Verschiebung
  - Streckung
  - Spiegelung
  - Affinität

11. Kegelschnitte

- Definition durch Brennpunkte, Exzentrizität, Gleichung in kartesischen Koordinaten in einem orthonormierten Koordinatensystem, reduzierte Gleichung, Parabel, zentraler Kegelschnitt
- Herleitung eines Kegelschnitts aus einer Gleichung der Form $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$
- ausgeartete Kegelschnitte

12. Vektorielle Isometrien des R^3

- Isometrie und assoziierte Matrix
- orthogonale Gruppe: Norm, Skalarprodukt und Basis
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- vektorielle Verknüpfung von Isometrien
- Klassifizierung vektorieller isometrien

13. Darstellende Geometrie

- Punkt, Gerade, Ebene
- Wechsel der Projektionsebene
- Schnitt von Geraden und Ebenen
- Orthogonalität von Geraden und Ebenen
- geometrische Probleme im Raum

14. Klassische Geometrie (synthetisch)

- Studium der Konfigurationen, Parallelität, Orthogonalität
- Konstruktionsprobleme
- Probleme des Ortes, der minimalen Wege
- Anwendung der Transformationen
- Änderung der Bezugspunkte: Translation, Rotation eines orthonormierten Bezugspunktes

15. Isometrien des affinen euklidischen Raums R^3

- Zusammenhang zwischen den vektoriellen und den affinen Isometrien
- Studium und Klassifizierung der Isometrien

16. Polynome

- Vektorraum und Polynomring
- Polynomdivision: Eindeutigkeit von Quotient und Rest
- ggT von zwei Polynomen
- Nullstellen von Polynomen
- Polynome in mehreren Veränderlichen
-

17. Lineare Abbildungen

- Homomorphismen, Endomorphismen und isomorphismen zwischen Vektorräumen
- Bild und Kern eines Homorphismus
- Matrix eines Homomorphismus', Rang einer Matrix, Eigenschaften
- Determinanten und ihre Eigenschaften

18. Linear- und Multilinearformen

- Dualer Vektorraum
- kovariante Vektoren
- duale Basis
- Linearformen bezüglich verschiedener Basen
- Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum
- multilineare Formen
- symmetrische und alternierende Multilinearformen: zwei- und dreidimensionale Determinanten
- Determinante eines Endomorphismus'
- Auswirkungen eines Basiswechsels
- lineare Unabhängigkeit

19. Zahlentheorie

- Bestimmung und Eigenschaften der natürlichen Zahlen
- Euklidische Division, Teilbarkeit, Primzahlen
- ggT und kgV, Euklidischer Algorithmus
- Satz von Bachet-Bézout: a und b sind teilerfremd genau dann, wenn es zwei ganze Zahlen u und v gibt, so dass gilt: $au + bv = 1$
- Satz von Gauss: Wenn a und b teilerfremd sind und wenn $b \cdot c$ von a geteilt wird, dann wird c auch von a geteilt
- Satz von Euklid: Wenn eine Primzahl p ein Produkt $a \cdot b$ teilt, dann werden a oder b von p geteilt
- Kongruenzen modulo n:
  - Kleiner Satz von Fermat: Für eine Primzahl p und eine ganze Zahl a, teilerfremd zu p, gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$
  - Satz von Wilson: Für eine Primzahl p gilt: $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$
  - Chinesischer Restsatz: Lösung eines Systems linearer Kongruenzen: $\begin{cases} x \equiv a \bmod u \\ x \equiv b \bmod v \end{cases}$
  - Anwendungen aus der Kryptologie (RSA-Verschlüsselung, ...)

20. Vektorwertige Funktionen

- Funktionen von R nach R^2 , C oder R^3
- Ableitungen:
  - einer vektorwertigen Funktion
  - eines Produkts aus einer reellen und einer vektoriellen Funktion
  - eines Skalarprodukts
  - eines Vektorprodukts
- Konstruktion von ebenen Kurven

21. Kinematischer Punkt in der Ebene

- Bezugssystem, Bewegung eines Punktes
- Flugbahn, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor
- Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, Beschleunigungen

22. Spezielle Relativitätstheorie (in zwei Dimensionen)

- Bewertung von Diagrammen, die aus der Kinematik bekannt sind (Zeit-Weg-Diagramme)
- Invarianz der Zeit: Gruppe der Galilei-Transformationen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich der Multiplikation G
- Addition der Geschwindigkeiten: $w = u + v$
- Isomorphismus von (G, x) und von $(R, +)$
- natürliche Einheit (c = 1)
- Invarianz der Lichtgeschwindigkeit: Gruppe der Lorentz-Transformationen $\beta \begin{pmatrix} 1 & u \\ u & 1 \end{pmatrix}$ mit $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ für die Multiplikation
- Addition der Geschwindigkeiten: $w = \frac{u+v}{1+uv}$ unter den Bedingungen $\|\vec{u}\| < 1$ und $\|\vec{w}\| > 1$
- Tachyonen-Anomalie, Kontraktion, Dilatation, Dopplereffekt

23. Nichtlineare dynamische Systeme

- Einfluss der Anfangsbedingungen
- Feigenbaum-Diagramm
- Mandelbrot-Menge
- Attraktoren
- Newtonsche Iterationsverfahren

24. Graphentheorie

- Definition
- Typen von Graphen
- Adjazenzmatrizen (Nachbarschaftsmatrizen)
- Eulersche Graphen
- Hamiltonkreise
- Spannbäume

25. Der Simplex-Algorithmus

- Formulierung eines Problems der linearen Optimierung: lineare Zielfunktion, Nebenbedingungen
- künstliche Variablen: Eingangs- oder Ausgangsvariablen
- Formulierung eines Problems mithilfe von Matrizen
- Basisvariablen und Nichtbasisvariablen
- zulässige Lösungen und Primallösung zu einer Basis
- Simplex-Algorithmus: Pivotmethode
- optimale Lösung
- Sonderfälle
- Zwei-Phasen-Methode

26. Anwendung der Mathematik in der Mechanik

- Beschleunigung
- Newtonsches Gesetz
- Vektoren
- Anwendungen der Newtonschen Gesetze
- Drehmoment
- Impuls und Dynamik
- Reibungskoeffizient
- Wurfbewegungen
- Arbeit, Leistung, Energie
- Stoßkoeffizient
- Massenmittelpunkt
- Umkippen eines Objekts auf der schiefen Ebene
- Federn
- einfache harmonische Bewegungen
- Kreisbewegungen
- Kreisbewegung in einer vertikalen Ebene

27. Algorithmen und Programmierung

- Begriffe der Algorithmik (siehe Kapitel über numerische Analysis aus dem Vertiefungskurs der 6. Klasse)
- Lokale und globale Variablen
- Begriff der Funktion und des Programms
- Verwaltung der Ein- und Ausgänge
- Kontrollanweisungen:
    - bedingte Anweisungen („wenn ....dann....“, „wiederhole.....bis dass ....“, „solange bis......mache....“)
    - Anweisungen in Schleifen („für......von....bis“)
- Kompilieren eines Programms
- Anwendungen auf die Realisierung verschiedener Programme (Analysis, Numerische Analysis, Wahrscheinlichkeit, Statistik, Geometrie,...).

28. Darstellung von Zahlen und binäre Arithmetik

- Binärdarstellung von positiven ganzen Zahlen:
  - binäre Addition
  - binäre Multiplikation
- oktale und hexadezimale Darstellung, Bits, Bytes (Oktette) und Worte:
  - Konvertierungen
- Darstellung der positiven und negativen Zahlen:
  - Vorzeichenbetragsmethode
  - binäre ganze Zahlen mit Vorzeichen (2-Komplement)
  - binäre positive Brüche
  - binäre Brüche mit Vorzeichen
  - Zweierkomplementdarstellung bei Festkommazahlen
  - Zweierkomplementdarstellung bei Gleitkommazahlen
  - Bereich der Gleitkomma-Darstellung
  - Standardisierung von Gleitkommazahlen
  - Rundungsmodi
- arithmetische Operationen im Gleitkomma-Modus:
  - Addition und Subtraktion
  - Multiplikation und Division
- Probleme der Genauigkeit:
  - Genauigkeit der Maschine
  - Minimierung des Einflusses des Genauigkeitsproblems