Europäische Schulen

Büro des Generalsekretärs
Abteilung für pädagogische Entwicklung

Ref.: 2010-D-621-de-2

Orig.: FR

S6ma

MATHEMATIKLEHRPLAN 6. SCHULJAHR SEKUNDARSTUFE

Vertiefungskurs 3 Stunden/Woche

VOM GEMISCHTER PÄDAGOGISCHER AUSSCHUSS DER EUROPÄISCHEN SCHULEN 4 UND 5 FEBRUAR 2010 IN BRÜSEL GENEHMIGT

Mit Inkraftsetzung zum September 2010

VERPFLICHTENDE THEMEN

1. *Mathematische Grundlagen: Mengen, Logik, Beziehungen und Struktur von Gruppen (unverbindliche Richtlinie: 25 Perioden*)

Waren durch eine zu starke Betonung von Anwendung und Handhabung die Grundlagen der Mathematik wie Mengenalgebra, Logik, mathematische Denkweisen, die unumgängliche algebraische Struktur der Gruppe oder Konzepte wie Beziehung und Anwendung auf ein Minimum reduziert oder ganz vernachlässigt, so ist es das Ziel dieses Lehrplans, diesen Grundlagen der Mathematik wieder den gebührenden Stellenwert zuzuordnen. Es soll hervorgehoben werden, dass die Mathematik weit mehr als eine Rechentechnik darstellt. Sie ist vor allem eine präzise Form des Denkens. Es wird ausdrücklich empfohlen, das Schuljahr mit dieser Einheit zu beginnen, da man im Laufe des Jahres immer wieder darauf Bezug nehmen kann. Selbst im gehobenen Kurs mit fünf Wochenstunden könnte man bei passender Gelegenheit hierauf zurückgreifen.

In dieser Einheit, die sich den zentralen Grundlagen der Mathematik widmet, dürfte die Nutzung technologischer Hilfsmittel den traditionellen Charakter des Kurses nur geringfügig beeinflussen. Dem Lehrer steht es jedoch vollkommen frei, von dieser Unterstützung dort Gebrauch zu machen, wo sie einen Zugewinn für seinen Unterricht darstellt. Es sollte jedoch diesbezüglich keinerlei Kompetenz im strengen Sinne angestrebt werden.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Mengenalgebra	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Erklären und Anwenden der Begriffe Menge, leere Menge Untermenge, Inklusion und Gleichheit von zwei Mengen, Komplementärmenge, Vereinigung und Durchschnitt von Mengen, Hintereinanderausführungen von Vereinigung und Durchschnitt von Mengen (beide Distributivitätsgesetze und Gesetz von Morgan), Kardinalzahl einer Menge, Potenzmenge, Produktmenge.	
Logik, Bezeichnungen und Denkweisen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • die Grundbegriffe der Logik erklären und anwenden: o Satz, Formel, Konjunktion oder Disjunktion einer Aussage oder	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	Formel; o Implikationen von Aussageformen; o Negation einer Aussage, einer Formel oder Implikation; o Äquivalenz; o Existenz- und Allquantor. • die Begriffe Axiom, Lemma, Theorem, Korollar, notwendige und / oder hinreichende Bedingung, Dirichlet'sches Prinzip erklären. • anwenden der klassischen Beweismethoden der Mathematik, insbesondere der Nachweis der Gleichheit durch: o Methode der Hilfshypothese; o Methode der Fallunterscheidung; o Beweis des Gegenteils; o Beweis durch Widerspruch; o Beweis durch ein Gegenbeispiel; o Vollständige Induktiuon.	
Beziehungen und Anwendungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Anwendung der Begriffe: binäre Relation, Graph einer Relation oder Umkehrrelation, Ordnungs- und Äquivalenzrelation, Funktion, Abbildung, Injektion, Surjektion, Bijektion , Umkehrrelation	
Gruppen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • definieren und anwenden der Gesetze einer inneren Verknüpfung: Assoziativität und Kommutativität, neutrales Element, inverses Element, reguläres Element einer Gruppe (einschließlich abelscher Gruppen) • kennen der folgenden Gruppeneigenschaften: o Eindeutigkeit des neutralen und des inversen Elements	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	o der Einfluss der korrekten Anwendung aller Komponenten auf die Lösungen von Gleichungen. • im Verlauf des Kurses folgende Begriffe verstehen: o unendliche Gruppen: ▪ Zahlenmengen; ▪ einige Gruppen von geometrischen, ebenen Transformationen (rein geometrisch) wie z.B.: ❖ Translationen; ❖ Ähnlichkeitstransformationen mit gleichem Zentrum; ❖ Translationen und Punktspiegelungen; ❖ Translationen und Ähnlichkeitstransformationen mit gleichem Zentrum; ❖ Translationen und Rotationen. Die Studie dieser Gruppen wird in dem Kapitel vertieft, das der Ähnlichkeit gewidmet ist. ▪ unendliche Gruppe von affinen Funktionen . o endliche Gruppen: ▪ zu der Definition einer inneren Verknüpfung die Verknüpfungstabelle von Pythagoras (auch Cayley-Tafel genannt) erstellen; ▪ aus der Kenntnis der spezifischen Eigenschaften dieser Pythagoras-Tabelle einer Gruppe eine Tabelle aufstellen für: ❖ irgendeine Gruppe $(G,\cdot)$ mit 2, 3 oder 4 Elementen; ❖ Gruppen von Symmetrien eines gleichseitigen Dreiecks, Rechtecks und Quadrats;	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	❖ Gruppen von Permutationen einer endlichen Menge $(n \leq 4)$; ❖ Gruppen von Restklassen modulo *n*. • die Definitionen des Homomorphismus und Isomorphismus von Gruppen kennen und an den zuvor untersuchten Gruppen erklären	

2. *Determinanten und Lineare Algebra* (*unverbindliche Richtlinie: 25 Perioden*)

Diese Einheit hat das Ziel, jene Konzepte und Methoden zu vertiefen und zu festigen, die in den vergangenen Jahren zur Lösung und zur geometrischen Interpretation linearer Gleichungssysteme mit zwei oder drei Variablen eingeführt wurden.

Ausgehend von den bereits erworbenen Kenntnissen soll die Einführung der konkreten Begriffe ***Matrix, Determinante, Linearkombination, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit*** *sowie das Konzept des* ***Ranges einer Matrix*** *die Schüler befähigen, die grundlegenden Prinzipien der Linearen Algebra zu verstehen. Abgesehen von der Fähigkeit der Lösung linearer Gleichungssysteme verschiedenster Art, soll der Schüler jedoch vor allem einen Einblick in die zahlreichen konkreten Anwendungsmöglichkeiten der Linearen Algebra zur Bewältigung von Alltagsproblemen erhalten.*

Der erste Abschnitt dieser Einheit kann, abhängig vom vorausgegangenen Unterricht, den Schülern bereits mehr oder weniger bekannt sein, bzw. von ihnen beherrscht werden. Unter Berücksichtigung der Vorkenntnisse, könnte dieser Abschnitt sowohl zur Wiederholung zuvor erlernter Konzepte dienen, als auch zur Schaffung der Grundlage für das in dieser Einheit angestrebte tiefere Verständnis.

Es ist insbesondere zu betonen, dass die im letzten Thema dieses Lehrplankapitels genannten praktischen Anwendungen keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Daher steht es dem Lehrer frei, diese zu ergänzen und so die Bedeutung der mathematischen Konzepte hervorzuheben, die in dieser Einheit eingeführt werden. Zum Beispiel sind die Simplex-Methode oder verschiedene Optimierungsprobleme nicht aufgelistet. Der Lehrer ist jedoch durch den Lehrplan verpflichtet, drei Anwendungen seiner Wahl aus der vorgegebenen Liste zu behandeln. Der Schüler soll dadurch befähigt werden, mithilfe dieser Kenntnisse konkrete Probleme zu lösen.

Der Schüler soll die grundlegenden Verfahren im Umgang mit Gleichungssystemen, Matrizen und Determinanten bis zur 3. Ordnung beherrschen, ohne auf technologische Hilfsmittel zurückzugreifen. Die Verwendung dieses Hilfsmittels wird in jenen Übungen von entscheidendem Nutzen sein, in denen die 3.Ordnung überschritten wird, die Potenz- oder die inverse Matrix berechnet werden soll oder aber wenn Determinanten einer höheren Ordnung als drei bestimmt werden sollen. Dies gilt darüber hinaus für alle Problemstellungen mit einem oder mehreren Parametern.

Die Reihenfolge der Einheiten sowie die Einbeziehung der praktischen Anwendungen, welche in der letzten Einheit genannnt werden, liegen im Ermessen des Lehrers.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Gleichungssysteme. Pivot-Gauß-Methode	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • erkennen äquivalenter Gleichungssyteme und Operationen, mit denen sich ein System in ein äquivalentes System umwandeln lässt;	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Matrizen in das technologische Hilfsmittel eingeben;

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	• kennen der Begriffe der kompatiblen und inkompatibel sowie der bestimmten und unbestimmten Gleichungssysteme; • erkennen dieser Systeme durch aufzeigen von Beziehungen zwischen den Gleichungen, die das System bilden oder durch die geometrische Interpretation der Systeme von 2 oder 3 Gleichungen mit 2 oder 3 Variablen. • Umformung eines gegebenen Gleichungssystems in die Dreiecksform; • Gleichungssysteme durch die Pivot-Gauß-Methode untersuchen und lösen (Austausch von zwei Zeilen. Multiplikation einer Zeile mit einer von null verschiedenen Zahl, Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile); • anwenden der Pivot-Gauß-Methode zur Lösung von Gleichungssystemen, die von einem Parameter abhängen; • zu einem konkreten Problem ein Gleichungssystem aufstellen, das System lösen und die Lösungen bezogen auf das konkrete Problem interpretieren. Die geometrische Interpretation und die Lösung von einfachen Gleichungssystemen ohne Gebrauch technologischer Hilfsmittel werden auf lineare Gleichungssysteme mit 2 oder 3 Gleichungen und mit 2 oder 3 Variablen begrenzt.	• lösen von Gleichungssystemen des Typs $n \times n$; • lösen nichtlinearer Gleichungssysteme in zwei Variablen mithilfe der graphischen Darstellung durch das technologische Hilfsmittel (eine der Variablen muss sich als Funktion der anderen in jeder Gleichung ausdrücken lassen); • die Gültigkeit der durchgeführten Umwandlungen überprüfen; • die Gaußsche Methode Schritt für Schritt umsetzen; • die Dreiecksmatrix direkt aus dem Gleichungssystem berechnen; • die Ergebnisse der Übungen, die ohne technologische Hilfsmittel durchgeführt wurden, überprüfen.
Grundkenntnisse über Matrizen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • die folgenden Begriffe verstehen und anwenden: o $m \times n$ -Matrizen und deren Elemente $\left(a_{i,j}\right)_{1\le i\le m,\ 1\le j\le n}$, wobei *m* die Anzahl der Zeilen und *n* die Anzahl der Spalten angibt, Zeilenmatrix (-vektor) und Spaltenmatrix (-vektor), Untermatrix, transponierte Matrix, Nullmatrix; o quadratische Matrizen vom Typ $n \times n$, darunter symmetrische,	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Umgang mit Matrizen aller Art; • Berechnung der Transponierten einer Matrix.

<table>
<tr><th>Themen</th><th>Kenntnisse und Fähigkeiten</th><th>Nutzung technologischer Hilfsmittel</th></tr>
<tr><td></td><td>Dreiecks- und Diagonalmatrizen;
o aufstellen einer Matrix, die bestimmte Bedingungen erfüllt oder die Aussage eines konkreten Problems mittels einer Matrix darstellen.</td><td></td></tr>
<tr><td>Operationen mit Matrizen</td><td>Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:
Addition zweier $m \times n$ -Matrizen;
Multiplizieren einer $m \times n$ - Matrix mit einer reellen Zahl;
verstehen, dass die Menge der $m \times n$ -Matrizen zusammen mit der Addition als Verknüpfung eine kommutative Gruppe bildet;
Multiplizieren einer $m \times p$ -Matrix mit einer $p \times n$ -Matrix und insbesondere eine $m \times p$ -Matrix mit einer $p \times m$ -Matrix;
verstehen, dass die Multiplikation von $n \times n$ -Matrizen eine interne, assoziative Verknüpfung bildet, die ein neutrales Element hat, aber nicht kommutativ ist;
für quadratische 2×2 -Matrizen die Inverse der Matrix mithilfe eines Gleichungssystems berechnen (Beschränkung auf einfache Fälle);
verstehen, dass im allgemeinen eine Menge von $n \times n$ -Matrizen mit der Multiplikation als Verknüpfung nicht die Struktur einer Gruppe besitzt;
lösen von einfachen Matrizengleichungen der Art $A \times X = B$;
zu einem linearen Gleichungssystem die Matrix angeben;
berechnen der n-ten Potenz quadratischer Matrizen in einfachen Fällen.</td><td>Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:
Berechnung der Potenz einer Matrix;
Überprüfen der Eigenschaften der Matrix-Operationen;
Alle Matrizen ermitteln, die mit einer gegebenen Matrix A kommutieren, d.h.: $A \times X = X \times A$;
Matrizengleichungen lösen;
die Ergebnisse der Übungen, die ohne technologische Hilfsmittel durchgeführt wurden, überprüfen.</td></tr>
<tr><td>Determinanten n-ter Ordnung</td><td>Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:
berechnen der Determinanten 2. und 3. Ordnung durch die Produkte der Diagonalen (Regel von Sarrus) und verstehen, dass dies ein Algorithmus ist, der sich aus dem Lösungsverfahren linearer</td><td>Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:
die Determinante einer quadratischen Matrix berechnen;
die Eigenschaften von Determinanten</td></tr>
</table>

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen in zwei Variablen oder drei Gleichungen in drei Variablen ableiten lässt; • Verstehen, dass sich die Determinanten der Ordnung *n,* mit *n* ≥ 3 durch die Entwicklung nach einer Zeile oder einer Spalte berechnen lassen, dass das Ergebnis unabhängig von der gewählten Zeile oder Spalte ist und dass dazu der Minor $\left\|M_{i\,j}\right\|$ des Elements $a_{i,j}$ der Matrix A als Determinante der $(n-1)$-quadratischen Teilmatrix von A - die durch Weglassen der $i-\text{ten}$ Zeile und $j-\text{ten}$ Spalte gebildet wird - sowie der Kofaktor $A_{i\,j}$ von $a_{i,j}$ durch $A_{i\,j}=(-1)^{i+j}\left\|M_{i\,j}\right\|$ bestimmt werden; • Berechnen einer einfachen Determinante der Ordnung 4 ohne technologische Hilfsmittel; • zur Berechnung einer Determinante die Invarianz der Determinantenfunktion von Determinanten der Ordnung n anwenden (zur Vereinfachung erfolgt die Darstellung für die Ordnung 3, mit Z_i werden die Zeilen (oder Spalten) der Matrix bezeichnet): o $\det(Z_1,Z_2,Z_3)=-\det(Z_2,Z_1,Z_3)$ o $\det(k\cdot Z_1,Z_2,Z_3)=k\cdot\det(Z_1,Z_2,Z_3)$ o $\det(Z_1'+Z_1'',Z_2,Z_3)=\det(Z_1',Z_2,Z_3)+\det(Z_1'',Z_2,Z_3)$ o jede Determinante, die in einer Spalte (oder Zeile) ausschließlich Nullen enthält, ist gleich null; o jede Determinante mit zwei identischen Spalten (oder Zeilen) ist gleich null; o jede Determinante mit zwei proportionalen Spalten (oder Zeilen) ist gleich null;	überprüfen; • durch Umformungen Nullen in einer Zeile (oder Spalte) einer Determinante erreichen; • lösen von Problemen mithilfe von Determinanten; • den Rang einer Matrix berechnen.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	o $\det(Z_1 + r \cdot Z_2 + s \cdot Z_3, Z_2, Z_3) = \det(Z_1, Z_2, Z_3)$ o $\det(M \times N) = \det(M) \cdot \det(N)$ für zwei quadratische Matrizen M und N *;* • berechnen von Determinanten mit einem oder mehreren Parametern und untersuchen, für welche Parameterwerte die Determinante null wird. •	
Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit, Rang einer Matrix	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • auf der Grundlage von Kenntnissen über die Menge der Vektoren der Ebene aus den vorangegangenen Kursen: o die Definition der Linearkombination von Zeilenmatrizen (-vektoren) oder Spaltenmatrizen (-vektoren) angeben; o Definition der Begriffe *Abhängigkeit* und *lineare Unabhängigkeit* von Zeilenmatrizen (-vektoren) oder Spaltenmatrizen (-vektoren) unter Verwendung der grundlegenden Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit: $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = O \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ o Prüfung der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Zeilenmatrizen (-vektoren) oder Spaltenmatrizen (-vektoren) durch einfache Beobachtung, durch theoretische Begründung oder indem die Grundeigenschaft verwendet wird; o Definition des Begriffes der regulären quadratischen Matrix (mit der Determinante ungleich null) o Definition des Rangs einer Matrix *A* als die höchste Ordnung einer regulären Untermatrix oder als die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenmatrizen (Zeilenmatrizen) von A; o Bestimmung des Rangs einer Matrix durch einfache Beobachtung ihrer Elemente in einfachen oder offensichtlichen	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	Fällen, durch Verwendung der Determinanten von Untermatrizen oder mithilfe der Pivot-Methode von Gauß o Bestimmung des Rangs einer Matrix in Abhängigkeit von einem Parameter; o Verwendung der Determinanten zur Überprüfung der linearen Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Zeilen- oder Spaltenmatrizen (-vektoren);	
Inverse einer regulären quadratischen Matrix	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Überprüfen, ob eine gegebene Matrix regulär ist, oder nicht; • Bestimmung der Minore $\left\|M_{i\,j}\right\|$ zu den Elementen $a_{i,j}$ aus den Determinanten der Untermatrizen der Matrix A durch Streichung der $i-\text{ten}$ Zeile und $j-\text{ten}$ Spalte; • Bestimmung der Kofaktoren $A_{i\,j}$ mit $A_{i\,j}=(-1)^{i+j}\left\|M_{i\,j}\right\|$ zu den Elementen $a_{i,j}$; • Bestimmung der Inversen einer Matrix A durch Multiplikation der klassischen Adjunkten von *A* mit der Inversen der Determinanten von *A*; • Nachweisen, dass die Menge der regulären, quadratischen Matrizen zweiter Ordnung bezüglich der Multiplikation eine nichtkommutative Gruppe bilden; • inverse Matrizen verwenden, um lineare Gleichungssysteme zu lösen, die zuvor in Matrixform gebracht wurden.	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Überprüfen, ob eine Matrix regulär ist ; • den Rang einer Matrix ermitteln; • die Inverse einer Matrix berechnen; • Nutzung der technologischen Hilfsmittel in Übungen mit Parametern.
Lösen von $m\times n$ Gleichungssystemen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:*	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:*

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
mit Determinanten	• den *Satz von Rouché* auf die Lösung und Erörterung von linearen Gleichungssystemen vom Typ $m \times n$ anwenden; • die *Cramersche Regel* auf die Lösung und Erörterung von linearen Gleichungssystemen des Typs $n \times n$ anwenden; • den *Satz von Rouché* und die *Cramersche Regel* auf die Lösung und Erörterung von linearen Gleichungssystemen mit einem oder mehreren Parametern anwenden; • homogene Gleichungssysteme lösen. Alle Übungen, die ohne Taschenrechner bearbeitet werden, sollen sich auf Fälle von einfachen Gleichungssystemen mit 2 oder 3 Gleichungen mit je 2 oder 3 Variablen beschränken.	Mithilfe der Cramerschen Regel lineare Gleichungssysteme des Typs $n \times n$ lösen.
Anwendungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • drei der folgenden Anwendungen ausschließlich unter Einsatz technologischer Hilfsmittel bearbeiten. Die Auswahl der Anwendungen ist dem Lehrer überlassen: o lösen von Aufgaben zur Wahrscheinlichkeit, die eine langfristige Stabilisierung enthalten (siehe Beispiel 1); o Situationen untersuchen, die sich auf die Dynamik von Gruppen beziehen, um Aussagen zu „Leadership“, isolierten Individuen, Interessengruppen, usw. treffen zu können (siehe Beispiel 2 und 4) o Die Potenz einer Matrix nutzen, um grafische Probleme zu lösen (siehe Beispiel 3); o das Produkt von Matrizen anwenden, um Probleme des öffentlichen Gesundheitswesens zu lösen (siehe Beispiel 5); o das Produkt einer Matrix mit einem Vektor nutzen, um die Entwicklung einer Population oder Migrationsbewegungen zu untersuchen (siehe Beispiele 6 und 7); o das Produkt von Matrizen nutzen, um Produktionsprozesse zu analysieren (siehe Beispiel 8); o eine Markov-Kette in einem der aufgeführten Fälle oder in	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* Optimale Nutzung der technischen Hilfsmittel zur Lösung nebenstehender praktischer Anwendungen.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	einem beliebigen anderen Fall untersuchen (siehe Beispiel 9); o Stadtplanung und Prognose innerstädtischer Wanderungsbewegungen. (siehe Beispiel 10); o Verwendung der Inversen einer Matrix zur Lösung von Problemen der Kryptographie (siehe Beispiel 11); o darstellen der Transformationen einer Ebene mithilfe der dazugehörigen Matrizen (siehe Beispiel 12); o einen einfachen Fall eines Problems betrachten, indem Eigenwerte untersucht werden (siehe Beispiel 13). PS: die Beispiele werden dem Lehrer in einem Begleitdokument zur Verfügung gestellt	

3. *Numerische Analysis* (*unverbindliche Richtlinie: 20 Perioden*)

Das Ziel dieser Einheit ist vielfältig.

Zunächst soll gezeigt werden, dass das Prinzip des Algorithmus in einer beträchtlichen Zahl von Konzepten enthalten ist, die dem Schüler bereits bekannt sind. Auf diese Weise wird auf das Prinzip Bezug genommen, ohne dass der Begriff bisher genannt wurde. Anhand der unten aufgeführten Beispiele lässt sich zeigen, dass es sich hierbei um keinen grundlegend neuen Sachverhalt handelt.

Darüber hinaus ist es von Vorteil, die Einführung der numerischen Methoden über die Anwendung in zwei mathematischen Problemfeldern vorzunehmen: bei der Berechnung von Nullstellen einer Funktion und bei der näherungsweisen Berechnung von Integralen. Letzteres sollte jedoch nicht die Inhalte des gehobenen Kurses in der 7. Klasse vorwegnehmen. Insgesamt erfordert der Gebrauch dieser Methoden den sicheren Umgang des Schülers mit den grundlegenden Prinzipien der Algorithmik (Verwaltung von Eingängen und Ausgängen sowie die Zuordnung von einem Wert und der Aufstellung von einer Berechnung).

Zusätzlich sollen auch die Vorteile des Gebrauchs der Tabellenkalkulation im mathematischen Kontext ermittelt werden.
Außerdem zeigt sich der Anspruch auf Genauigkeit des Mathematikers in der Messung der Fehler. Dementsprechend müssen die numerischen Berechnungen trotz unvollständiger formeller Möglichkeiten „unter Kontrolle“ sein*.*
Zusammenfassend ist diese Einheit insbesondere geeignet, die Genauigkeit des Schülers zu schärfen, indem sie ihn motiviert, seine Ergebnisse zu prüfen und zu kontrollieren.

PS: Dieser Kurs in „angewandter“ Mathematik erhebt jedoch keinerlei Anspruch darauf, einen Informatikkurs zu ersetzen.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Konzepte der AlgorithmiK	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Definition des Begriffs des Algorithmus; • einen Algorithmus lesen und verstehen; • einen Algorithmus in einfachen Fällen schreiben, wie z.B.: o euklidische oder dezimale Division; o eine Quadratwurzel durch systematisches Probieren bestimmen; o die Approximation einer Quadratwurzel mithilfe des babylonischen Algorithmus; o die Approximation von π durch eine beliebige Methode; o Lösung einer quadratischen Gleichung oder eines	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	Gleichungssystems; Ermittlung des ggT's zweier Zahlen, insbesondere mithilfe des euklidischen Algorithmus.	
Lösung nichtlinearer Gleichungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Verstehen, erklären und darstellen der Methoden: o Dezimalschritte (oder durch systematisches Probieren); o Halbierung; o Typ $x_{n+1} = f(x_n)$ ▪ Lagrange-Methode, auch Sekantenmethode genannt; ▪ Newton-Verfahren, auch Tangentenmethode genannt; ▪ Methode zur Bestimmung des Fixpunktes *f (x) = x*; • alle Annahmen oder möglichen Bedingungen aufzeigen, die erfüllt sein müssen.	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Anwendung jeder der nebenstehenden Methoden, algebraisch sowie mithilfe einer Tabellenkalkulation; • Schrittweise Anwendung der diesen Methoden entsprechenden Algorithmen; • Graphische Darstellung einiger Schleifen des Algorithmus; • Beurteilung der Relevanz (Auftreten von Konvergenz) eines Algorithmus; • Beurteilung der Konvergenz-geschwindigkeit eines Algorithmus.
Flächenberech-nungen	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Folgende Methoden verstehen, erklären und darstellen: o Rechtecksformel (linker, mittlerer, rechter Intervallwert) o Gaußsche Trapezformel o Simpson'sche Formel • den Fehler für die ersten beiden Methoden messen; für die dritte Methode liegt dieser Nachweis im Ermessen des Lehrers	*Die Schüler sollen Folgendes beherrschen:* • Anwendung jeder der nebenstehenden Methoden, algebraisch sowie mithilfe einer Tabellenkalkulation; • Schrittweise Anwendung der diesen Methoden entsprechenden Algorithmen; • Graphische Darstellung einiger Schleifen des Algorithmus; • beurteilen der Konvergenz-geschwindigkeit eines Algorithmus.

WAHLTHEMEN (wählen Sie eines der Themen)

Option A: Vektorräume (unverbindliche Richtlinie: 20 Perioden)

Die Struktur des Vektorraumes auf einem gegebenen Körper ist von wesentlicher Bedeutung. Sie kommt auf natürliche Weise ebenso in der Geometrie zum Ausdruck, woraus man mit Hilfe der üblichen Verfahren die Eigenschaften der Menge der Vektoren einer Ebene oder eines Raumes ableitet, wie auch in allen Polynomen mit einer Variablen oder in der Menge der $m \times n$-Matrizen. Es können noch weitere Beispiele von unterschiedlicher Komplexität angeführt werden. Untrennbar verbunden mit diesem Konzept ist der Begriff des Unterraums eines Vektorraums, der hier ebenfalls berücksichtigt werden soll. Die Grundkonzepte sollen auf diese Weise definiert und angewendet werden. Schließlich ist es zudem unumgänglich, die Isomorphie zu erörtern, die zwischen allen n-dimensionalen Vektorräumen und $\mathbb{R}^n$ besteht.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Vektorräume	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Die Definition des Vektorraums kennen (die Definition der algebraischen Struktur eines Körpers wird kurz zusammengefasst und mit Hilfe von Beispielen verdeutlicht ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ mit den üblichen Verknüpfungen), außerdem wird der Unterschied zwischen internen und externen Rechenoperationen deutlich gemacht) • Folgende Eigenschaften kennen : o $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ o $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$ wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ o $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$ o $\lambda \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ oder $\vec{u} = \vec{0}$ • Linearkombinationen berechnen • (Zumindest) die Beispiele des Kurses der 4. oder der 5. Klasse kennen : o Vektorraum der Vektoren in der Ebene und im Raum o Vektorraum der Polynome	

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	o ({stetige Funktionen}, $+$, $\mathbb{R}$, $\times$) o $\left(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R}, \times\right)$	
Untervektorräume	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • die Definition des Untervektorraums kennen • hinreichende Bedingungen präzisieren, die eine Menge zu einem Untervektorraum werden lassen • erzeugende Systeme, linear unabhängige und linear abhängige Mengen definieren • Basis und geordnete Basis definieren • Die Dimension einer Basis definieren • Die Beziehungen und Implikationen von Erzeugendensystemen, linear unabhängigen Mengen, Basen und Dimensionen kennen • Verstehen und beschreiben, dass jeder n-dimensionale Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist • Zumindest die folgenden Beispiele kennen: o Die Gerade, Vektorraum der Dimension 1 o Die Ebene, Vektorraum der Dimension 2 o Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2, Vektorraum der Dimension 3 o Polynome vom Grad kleiner oder gleich 3 und 2$\times$2-Matritzen, Vektorraum der Dimension 4	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • die Möglichkeiten effektiv nutzen, mit der die Arbeit mit Vekorräumen der Dimension größer oder gleich 3 unterstützt werden kann.

Option B: Positive Isometrien und direkte Ähnlichkeiten in der komplexen Ebene

Diese Einheit ergänzt jene Kapitel über komplexe Zahlen aus dem gehobenen Kurs. Der Schwerpunkt sollte hierbei vorrangig auf dem geometrischen Aspekt liegen. Die Methoden der komplexen Zahlen lassen sich gegebenenfalls auch zur anschaulichen Erläuterung bestimmter trigonometrischer Formeln anwenden. Letztgenannter Aspekt lässt sich insbesondere im Pflichtteil des Vertiefungskurses der 7.Klasse wieder aufgreifen, wenn trigonometrische Gleichungen und Funktionen behandelt werden. Darüber hinaus kann der Inhalt dieser Einheit dazu beitragen, bestimmte Beweise aus dem Kapitel über die mathematischen Grundlagen (Gruppen-Struktur) erheblich zu vereinfachen.

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
Geometrische Deutung der Rechenoperationen mit komplexen Zahlen	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • die folgenden Rechenoperationen mit komplexen Zahlen geometrisch interpretieren können : o Summe o Produkt mit einer reellen Zahl o Produkt mit einer rein imaginären Zahl o Produkt mit irgendeiner komplexen Zahl o Das Inverse einer komplexen Zahl o Die konjugiert komplexe Zahl	
Funktionentheorie mit *f*(*z*) = *a z* + *b*	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Das Konzept der komplexwertigen Funktion mit einer komplexen Variable verstehen • Eine geometrische Interpretation für die folgenden Abbildungen, deren Verknüpfungen und deren Umkehrung von der Menge $\mathbb{C}$ auf die Menge $\mathbb{C}$ geben : $z \mapsto z + a \ (a \in \mathbb{R})$ $z \mapsto kz \ (k \in \mathbb{R})$ $z \mapsto (\cos\theta + i\sin\theta)z \ (\theta \in \mathbb{R})$	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Alle notwendigen Rechnungen mit Hilfe der algebraischen Schreibweise durchführen, also auch das Lösen von trigonometrischen und exponentiellen Gleichungen und solchen, in denen mit Matrizen gearbeitet wird

Themen	Kenntnisse und Fähigkeiten	Nutzung technologischer Hilfsmittel
	• Funktionen $f(z) = az + b$ (a ist aus ℂ ungleich 0) untersuchen auf : o Fixpunkte o Erhaltung der Winkel und der Längenverhältnisse o Geometrische Interpretation o Umkehrung • Form einer Matrix für solch eine Funktion und deren Umkehrung angeben	
Direkte Ähnlichkeit	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • für jede direkte Ähnlichkeitsabbildung die zugehörige komplexwertige Funktion und deren Umkehrung angeben • Ähnlichkeitsabbildungen zusammensetzen • Gruppen von direkten Ähnlichkeitsabbildungen bilden (Isomorphismen) • Das Bild einer Geraden, eines Kreises und eines Polygons bilden	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Die Bilder der Punkte und Figuren konstruieren, die durch Transformationen entstehen, die in diesem Kapitel genannt wurden (zentrale Symmetrie, Spiegelung, Translation, Rotation, zentrische Streckung und alle Verknüpfungen davon)
Positive Isometrien	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • für jede Isometrie die zugehörige komplexwertige Funktion und deren Umkehrung angeben • Isometrien zusammensetzen • Gruppen von positiven Isometrien bilden (Isomorphismen) • Das Bild einer Geraden, eines Kreises und eines Polygons bilden	*Die Schüler sollen folgendes beherrschen:* • Die Bilder der Punkte und Figuren konstruieren, die durch Transformationen entstehen, die in diesem Kapitel genannt wurden (zentrale Symmetrie, Spiegelung, Translation, Rotation, zentrische Streckung und alle Verknüpfungen davon)